3次元非有界領域におけるNavier-Stokes方程式の強解について(流体とプラズマの諸現象の数学解析)

小薗, 英雄; 小川, 卓克

数理解析研究所講究録
第 824 巻 1993 年 94-103

3 次元非有界領域における Navier-Stokes 方程式の強解について

九州大・教養　小薗英雄 (Hideo Kozono)
名古屋大・理　小川卓克 (Takayoshi Ogawa)

§1. 導入と結果.

Ω ($\subset \mathbb{R}^3$) は非有界領域でその境界 $\partial\Omega$ は一様に C^m 級で必ずしも有界でないとする。$Q_T = \Omega \times (0,T)$ において非圧縮性粘性流体を記述する Navier-Stokes 方程式の初期値境界値問題を考える。

$$
\text{(N-S)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u = -\nabla p + \Delta u & \text{in } Q_T, \\ \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } Q_T, \\ u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times (0,T), \\ u|_{t=0} = a, \end{cases}
$$

ここに速度ベクトル $u = (u_1(x,t), u_2(x,t), u_3(x,t))$, 及び圧力 $p = p(x,t)$ は未知函数、$a = (a_1(x,t), a_2(x,t), a_3(x,t))$ は与えられた初期値とし、外力項はないものとして考える。

ここでは $L^2_\sigma(\Omega)$ における (N-S) の大域的強解の存在とその $t \to \infty$ での解の漸近挙動を調べたい。$\Omega = \mathbb{R}^3$ の場合は Kato [8], Wiegner [15] らの結果があり, その後, Ukai [14], Iwashita [6] らによって, それぞれ $\mathbb{R}^3_+$, 外部領域に拡張された。これらの結果は L^p_σ における Stokes 作用素 $A = -P\Delta$ から生成される解析半群 e^{-tA}に対する $L^p - L^q$評価を用いて得られる (Giga-Sohr [4]参照)。一般の非有界領域においてはこのような評価が得られていないことに注意する。

以下 Pは $L^2(\Omega)$ から $L^2_\sigma(\Omega)$ への直交射影, $A \equiv -P\Delta$, $(D(A) = \{u \in H^2(\Omega); u|_{\partial\Omega} = 0\} \cap L^2_\sigma)$ は Stokes 作用素を表わす。我々の得た結果は次の 2 つの定理である (Kozono-Ogawa [9]) 。

定理 1. $a \in D(A^{1/4})$ とする。このときある定数$\lambda_* > 0$ が存在して, $\|A^{1/4}a\|_2 \leq \lambda_*$なる a に対して $(0,\infty)$ 上の (N-S) の強解 u が存在して一意である。すなわち,

(1) $u \in C([0,\infty); D(A^{1/4})) \cap C(0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); L^2_\sigma(\Omega))$

(2)

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au + P(u \cdot \nabla u) = 0, & 0 < t < \infty, \\ u(0) = a. \end{cases}$$

さらに $u \in C^1((0,\infty); D(A^\alpha))$ $(0 \leq \alpha < 3/4)$。

注意.

定理の仮定において初期値 a に $\|a\|_2$が小さいという条件を課していない点に注意する。(Heywood [5], Maremonti [10] 参照)

次に定理 1 の解に対する $t \to \infty$ での減衰の結果を述べる。

定理 2. $a \in D(A^{1/4}) \cap R(A^\mu)$,$(0 \leq \mu < 1/2)$ とする。この時μに依存するある定数λが存在して $\|A^{1/4}a\| \leq \lambda (\leq \lambda_*)$ ならば対応する定理 1 の解は次の order で減衰する。

(1) $0 \leq \mu < \frac{1}{4}$のとき

$$\|A^\alpha u(t)\|_2 = O(t^{-\mu-\alpha}) \quad 0 \leq \alpha < 1$$

$$\|A^\alpha \dot{u}(t)\|_2 = O(t^{-\mu-\alpha-1}) \quad 0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$$

(2) $\frac{1}{4} \leq \mu \leq \frac{1}{2}$のとき

$$\|A^\alpha u(t)\|_2 = o(t^{-\mu-\alpha}) \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$\|A^\alpha \dot{u}(t)\|_2 = o(t^{-\mu-\alpha-1}) \quad 0 \leq \alpha < \frac{3}{4}$$

ただしここで$\dot{u} = \frac{du}{dt}$である。

補題 3. $5/6 \leq p \leq 2$ とし $\mu = \frac{3}{2}(\frac{1}{p} - \frac{1}{2})$ とおけば, $L^2_\sigma \cap L^p \subset R(A^\mu)$ すなわち $a \in L^2_\sigma \cap L^p$ に対して $b \in D(A^\mu)$ が存在して $a = A^\mu b$ かつ

$$\|b\|_2 \leq C\|a\|_p$$

この補題と定理 2 により次の系が直ちに得られる。

系 4. $a \in D(A^{1/4}) \cap L^p$, $(5/6 \le p \le 2)$ とする。この時 p に依存するある定数λがあって, $\|A^{1/4}a\|_2 \le \lambda (\le \lambda_*)$ ならば対応する定理 1 の解 u は次の評価を満たす。

$$\|u(t)\|_r = \begin{cases} O(t^{-(3/2)(1/p-1/r)}), & 3/2 < p \le 2, \\ o(t^{-(3/2)(1/p-1/r)}), & 6/5 \le p \le 3/2, \end{cases} \quad \text{for } 2 \le r \le 6,$$

$$\|\nabla u(t)\|_2 = \begin{cases} O(t^{1/4-3/2p}), & 3/2 < p \le 2, \\ o(t^{1/4-3/2p}), & 6/5 \le p \le 3/2, \end{cases}$$

$$\|\overset{\bullet}{u}(t)\|_r = \begin{cases} O(t^{-3/2(1/p-1/r-1)}), & 3/2 < p \le 2, \\ o(t^{-3/2(1/p-1/r-1)}), & 6/5 \le p \le 3/2, \end{cases} \quad \text{for } 2 \le r \le 6,$$

$$\|\nabla \overset{\bullet}{u}(t)\|_2 = \begin{cases} O(t^{-3/4-3/2p}), & 3/2 < p \le 2, \\ o(t^{-3/4-3/2p}), & 6/5 \le p \le 3/2. \end{cases}$$

注意　Borchers-Miyakawa [1]では, 上のような decay を示す弱解が $p = 6/5 \sim 3/2$, $r = 2$ で構成されている。また Maremonti [10] は同様な decay をもつ強解を考えているがいずれも decay は Large order "$O(\cdot)$" である。また Heywood [5]の評価を用いれば $\|D^2u(t)\|_2$に対する decay の評価も得られる。

§2. 補題.

定理の証明には以下の補題が重要である。

補題 5. $0 < \alpha < 1/2$ とする。このとき $D(A^\alpha) \subset L^r$ $(1/r = 1/2 - 2n/3))$ であって,

$$\|u\|_r \le C\|A^\alpha u\|_2, \quad u \in D(A^\alpha).$$

補題 6. $1/4 \le \delta \le 1/2$ とする。 $u, v \in D(A^{1/4})$ に対して

$$\|(A+\varepsilon)^{-\delta}P(u\cdot\nabla v)\|_2 \le M_\delta \|A^{3/4-\delta}u\|_2 \|A^{1/2}v\|_2$$

ただし M_δは$\varepsilon > 0$ によらない定数。

注意Ωが一般の非有界領域のときは A が有界な逆をもたないことに注意する。補題 5 及び 6 は本質的に Fujita-Kato [2] Masuda [11]による次のような方法で得ることができる。まず,$(-\Delta+\varepsilon)^{-\delta}$の積分核表示

$$(-\Delta+\varepsilon)^{-\delta}f = \int_\Omega G_\alpha(x,y,\varepsilon)f(y)dy$$

への次のような評価

$$0 \leq G_\alpha(x, y, \varepsilon) \leq C_\alpha |x-y|^{2\alpha-3} \qquad (0 < \alpha < 1)$$

を $\mathbb{R}^3$上の resolvent $(-\Delta+\lambda)^{-1}$の積分核表示と最大値原理から求め，これと作用素の分数べきに対する Heintz-Kato の不等式 (Tanabe [13] 参照) を用いて示される。

補題 6 により次のような双線型作用素 $F_\delta(\cdot,\cdot)$ が定義できる。

$$F_\delta(u,v) = w - \lim_{\varepsilon\to 0}(A+\varepsilon)^{-1}P(u\cdot\nabla v), \quad u, v, \in D(A^{3/4})$$

この F_δを density を用いて $D(A^{1/2})$ 上に拡張したものに対して補題 6 より次が得られる。

<u>補題 7</u>.

$1/4 \leq \delta \leq 1/2$ とする。

(1) $$\|F_\delta(u,v)\|_2 \leq M_\delta \|A^{3/4-\delta}u\|_2 \|A^{1/2}v\|_2$$

(2) $$A^\delta F_\delta(u,v) = P(u\cdot\nabla v), \quad \text{for } u, v, \in D(A^{3/4})$$

(3) $$\frac{d}{dt}F_\delta(u(t), v(t)) = F_\delta(\dot{u}(t), v(t)) + F_\delta(u(t), \dot{v}(t)),$$

§3. 定理の証明の概略.

定理 1 の解の存在を示すには次の iteration scheme

$$(3.1) \quad \begin{cases} u_0(t) = e^{-tA}a, \\ u_{j+1}(t) = e^{-tA}a - \displaystyle\int_0^t A^{1/4}e^{-(t-s)A}F_{1/4}(u_j, u_j)(s)ds, \quad j = 0, 1, 2, \cdots. \end{cases}$$

に A^α $(1/4 \leq \alpha \leq 3/4)$ を作用させ

$$K_{\alpha,j} \equiv \sup_{t>0} t^{\alpha-1/4}\|A^\alpha u_j(t)\|_2$$

を評価するところから始める。補題 7 を用いることにより $K_{\alpha,j}$に対し，

$$(3.2) \qquad K_{\alpha,j+1} \leq K_{\alpha,0} + M_{1/4}B(3/4-\alpha, 1/2)K_{1/2,j}$$

を得る。ただし $B(\cdot,\cdot)$ は Beta 関数である。

$$K_{\alpha,0}=\sup_{t>0} t^{\alpha-1/4}\|A^{\alpha}e^{-tA}a\|_2$$

は $\|A^{1/4}a\|_2 << \mathrm{small}$ ととることにより小さく選べて (3.2) 式より

$$K_{1/2,j}\le k\equiv\frac{1-\sqrt{1-4MK_{1/4,0}B(1/4,1/2)}}{2M_{1/4}B(1/4,1/2)} \tag{3.3}$$

$$<\frac{1}{2M_{1/4}B(1/4,1/2)}\quad j=0,1,\cdots$$

なる評価を得る。これより直ちに $K_{\alpha,j}\le k\ j=0,1,\cdots$ を得る。同様にして差 $w_j(t)=u_j(t)-u_{j-1}(t)$ に対する評価も得ることができ極限 u が存在することがわかる。解の regularity 特にその Hölder 連続性よりこうして構成した u が微分方程式の解であることがわかる。解 $u(t)$ の時間パラメーター t に対する regularity は,(3.1) の時間微分形である

$$\dot{u}_{j+1}(t)=\dot{u}_0(t)+A^{1/4}e^{-tA}F_{1/4}(u_j,u_j)(t)+\int_0^t A^{1/4}(e^{-sA}-e^{-tA})\frac{\partial}{\partial s}F_{1/4}(u_j,u_j)(t-s)ds$$

に A^{α} $(0<\alpha\le 3/4)$ を作用させて前述と類似の評価を行なう。

定理 2 の証明。 定理 2 の証明は $0<\mu<1/4$, $1/4\le\mu\le 1/2$ 及び $\mu=1/2$ の時の 3 つの状況に分けて考える。

$0<\mu<1/4$ の場合。

$a\in R(A^{\mu})$ に注意して,$0<\alpha<3/4$ の時に

$$A^{\alpha}u_{j+1}=A^{\alpha+\mu}e^{-tA}b-\int_0^t A^{\alpha+1/4}e^{-(t-s)A}F_{1/4}(u_j,u_j)ds\quad j=0,1,2,\cdots$$

を評価する。

$$\sup_{t>0} t^{\alpha+\mu}\|A^{\alpha}u_j(t)\|_2\equiv L_{\alpha,j}$$

とおけば, $\{L_{\alpha,j}\}$ に対して

$$L_{\alpha,j+1}\le L_{\alpha,0}+M_{1/4}kB(3/4-\alpha,1/4-\mu)L_{1/2,j}$$

を得る。ここで kは (3.3) で得られたものである。$\|A^{1/4}u\|_2 < \lambda(\mu)$ より

$$k < \frac{1}{2MB(1/4, 1/4-\mu)}$$

ならば $\{L_{1/2,j}\}$ は有界列になる。このことから $\|A^{\alpha}u\|_2 \leq Ct^{-\alpha-\mu}$を得ることができる。
　$1/4 \leq \mu < 1/2$ の場合。
　今度は,

$$A^{\alpha}u_{j+1} = A^{\alpha+\mu}e^{-tA}b - \int_0^t A^{\alpha+1/4}e^{-(t-s)A}F_{1/2}(u_j, u_j)ds \quad j = 0, 1, 2, \cdots$$

を前述同様に評価すると

$$L_{\alpha,j+1} \leq L_{\alpha,0} + M_{1/2}kB(1/2-\alpha, 1/2-\mu)L_{1/4,j}.$$

ここから同様に

$$k < \frac{1}{2M_{1/2}B(1/4, 1/2-\mu)}$$

であれば $\{L_{1/4,j}\}$ は有界列となり

$$\|A^{\alpha}u\|_2 \leq Ct^{-\alpha-\mu}$$

$(\alpha < 1/2)$ を得る。
　一方定理 1 の解の構成の仕方から

$$\|A^{\alpha}u\|_2 \leq Ct^{-\alpha+1/4}$$

なので $1/4 \leq \mu < 1/2$ に対して

$$\int_0^{\infty} \|A^{3/4-\mu}u(s)\|_2^2 ds < \infty$$

である。次に

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dt} + Av + F_{\mu}(u, u) = 0, \quad 0 < t < \infty, \\ v(0) = b. \end{cases} \tag{3.4}$$

を考え，vとの内積をとり時間で積分することにより

$$\sup_{t>0}\|v(t)\|_2 \le (\|b\|_2^2 + M_\mu \int_0^t \|A^{3/4-\mu}u(\tau)\|^2 d\tau)\exp(M_\mu \int_0^t \|A^{1/2}u(\tau)\|^2 d\tau)$$

$$\le (\|b\|_2^2 + C)\exp(M_\mu \|a\|_2^2) \le \text{一定}$$

を得る。よって今度は (3.4) に$\phi(t) = e^{-2(t-\tau)A}v(\tau)$ をかけ時間で積分することにより，

$$\|v(t)\|_2^2 \le \|e^{-(t-s)A}v(s)\|_2^2 + M_\mu \sup_\tau \|v(\tau)\| \int_s^t (\|A^{3/4-\mu}u(\tau)\|_2^2 + \|A^{1/2}u(\tau)\|_2^2) d\tau.$$

ここで 0 が A の固有値でないことにより $\|e^{-tA}\psi\|_2 \to 0$ $(t \to 0)$ であるから

(3.5)

$$\limsup_{t\to\infty}\|v(t)\|_2^2 \le M_\mu \sup_{t>0}\|v(t)\|_2^2 \int_s^\infty (\|A^{3/4-\mu}u(\tau)\|_2^2 + \|A^{1/2}u(\tau)\|_2^2) d\tau$$

$$\to 0 \text{ as } s \to 0$$

よって $\|v(t)\|_2 \to 0$ を得る。

最後に $0 < \alpha < 3/4$ に対して

$$\text{(3.6)} \qquad A^\alpha u = A^{\alpha+\mu}e^{-(t-s)A}v(s) - \int_s^t A^{\alpha+1/4}e^{-(t-\tau)A}F_{1/4}(u(\tau), u(\tau)) d\tau$$

を評価し

$$\|A^\alpha u(t)\|_2 \le (t-s)^{-\alpha-\mu}\|v(s)\|_2 + M_{1/4}\int_s^t (t-\tau)^{-\alpha-1/4}\|A^{1/4}u(\tau)\|_2 \|A^{1/2}u(\tau)\|_2 d\tau$$

ここで右辺第 2 項は

$$CM_{1/4}\int_s^t (t-\tau)^{-\alpha-1/4}\tau^{-3/4-\mu} d\tau$$

$$\le Cs^{-3/4-\mu}(t-s)^{-\alpha+3/4}$$

と評価できるので，$s=t/2$ と選べば $\sup\|v(t/2)\|_2<\infty$ より

$$\|A^\alpha u(t)\|_2\le Ct^{-\alpha-\mu}$$

を得る。これを用いて (3.6) 式を再度評価し直すと (3.5) より $\|v(t/2)\|_2\to 0 \quad t\to 0$ なので

(3.7)

$$\|A^\alpha u(t)\|_2\le Ct^{-\alpha-\mu}\|v(t/2)\|_2+M\int_{t/2}^{t}(t-\tau)^{-\alpha-1/4}\|A^{1/4}u(\tau)\|_2\|A^{1/2}u(\tau)\|_2d\tau$$

$$\le Ct^{\alpha-\mu}\|v(t/2)\|_2+CM\int_{s}^{t}(t-\tau)^{-\alpha-1/4}\tau^{-3/4-2\mu}d\tau$$

$$=o(t^{-\alpha-\mu})$$

を得る。

$\mu=1/2$ の場合。

この場合 $L_{\alpha,j}$ に対する評価から $\|A^\alpha u\|_2\le Ct^{-\alpha-\mu}$ が直接得られないが $a\in D(A^{1/4})\cap R(A^{1/2-\varepsilon})$ に注意すれば $\|A^{1/4}u\|_2\le Ct^{-3/4-\varepsilon}$ を得ることができる。一方 $\|A^{1/4}u(t)\|_2=O(1)\ t\to 0$ なので

$$\int_0^\infty\|A^{1/4}u(s)\|_2^2ds<\infty$$

である。このことより前の場合と同様にして

$$u(t)=A^{1/2}v(t)\quad v\in D(A),\quad \lim_{t\to\infty}\|v(t)\|_2\to 0$$

を得る。さらに (3.7) と同様な評価により

$$\|A^\alpha u(t)\|_2\le Ct^{-\alpha-\mu}\|v(t/2)\|_2+Ct^{-\alpha-1/2+2\varepsilon-3/4}$$

を得る。 $2\varepsilon-3/4<0$ より

$$\|A^\alpha u(t)\|_2=o(t^{-\alpha-1/2})$$

となる。

$\dot{u}(t)$ に対しては

$$\|\dot{u}(t)\|_2^2\le\left(\frac{1}{\|\dot{u}(s)\|^2}+\frac{1}{4}\int_s^t\frac{d\tau}{\|A^{1/2}u(\tau)\|^2}\right)^{-1}\exp\left(\int_s^\infty\|A^{1/2}u(t)\|_2^4dt\right)$$

より $\|\dot{u}(t)\|_2=o(t^{-1})$ を得たのち $\|A^\alpha\dot{u}(t)\|_2$ に対する類似の評価を行ない得ることができる。

References

[1] Borchers,W. and Miyakawa, T., *L^2 decay for the Navier-Stokes flows in unbounded domains with application to exterior stationary flows*, Arch. Rat. Mech. Anal. **118** (1992), 273–295.

[2] Fujita, H. and Kato, T., *On the Navier-Stokes initial value problem 1*, Arch. Rat. Mech. Anal. **46** (1964), 269–315.

[3] Giga, Y. and Miyakawa, T., *Solution in L_r of the Navier-Stokes initial value problem*, Arch. Rat. Mech. Anal. **89** (1985), 267–281.

[4] Giga,Y. and Sohr, H., *On the Stokes operator in exterior domains*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. IA Math. **36** (1989), 103–130.

[5] Heywood, J. G., *The Navier-Stokes equations :On the existence, regularity and decay of solutions*, Indiana Univ. Math. J. **29** (1980), 639–681.

[6] Iwashita, H., *$L_q - L_r$ estimates for solutions of nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problem in L_q spaces*, Math. Ann. **285** (1989), 265–288.

[7] Kato, T. and Fujita, H., *On the nonstationary Navier-Stokes system*, Rend. Sem. Math. Univ. Padova **32** (1962), 243–260.

[8] Kato, T., *Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation $\mathbf{R}^m$, with applications to weak solutions*, Math. Z. **187** (1984), 471–480.

[9] Kozono H. and Ogawa T., *Global strong solution and its decay properties for the Navier-Stokes equations in three dimensional domains with noncompact boundaries*, Math. Z. (to appear).

[10] Maremonti,P., *Some results on the asymptotic behavier of Hopf weak solutions to the Navier-Stokes equations in unbounded domains*, Math.Z. **210** (1992), 1–22.

[11] Masuda, K., *On the stability of incompressible viscous fluid motions past object*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 294–327.

[12] Miyakawa, T. and Sohr, H., *On energy inequality, smoothness and large time behavior in L^2 for weak solutions of the Navier-Stokes equations in exterior domains*, Math. Z. **199** (1988), 455–478.

[13] Tanabe, H., "Equations of Evolution," Pitman, London, 1979.

[14] Ukai, S., *A solution formula for the Stokes equation in $\mathbf{R}^n_+$*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), 611–621.

[15] Wiegner, M., *Decay results for weak solutions of the Navier-Stokes equations in* $\mathbb{R}^n$, J. London Math. Soc. **35** (1987), 303–313.